カルノー空間の間の固有調和写像について (双曲空間及び離散群の研究II)

西川, 青季

数理解析研究所講究録 1270 巻 2002 年 153-169

カルノー空間の間の固有調和写像について

西川 青季 東北大学大学院理学研究科
Seiki Nishikawa, Mathematical Institute, Tohoku Univesrity *

負曲率多様体の典型的な例である実双曲型空間や複素双曲型空間は，Euclid 空間内の領域として実現することができる．実際，実双曲型空間 $\boldsymbol{R}H^m$ は m 次元実 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^m$ 内の単位開球体 $B^m=\{x\in\boldsymbol{R}^m \mid |x|<1\}$ に Poincaré 計量とよばれる Riemann 計量をあたえたものとして，また複素双曲型空間 $\boldsymbol{C}H^m$ は m 次元複素 Euclid 空間 $\boldsymbol{C}^m$ 内の単位開球体 $B^{2m}=\{z\in\boldsymbol{C}^m \mid |z|<1\}$ に Bergman 計量とよばれる Kähler 計量をあたえたものとして実現され，これらの開球体の境界である $m-1$ および $2m-1$ 次元の単位球面 S^{m-1} と S^{2m-1} は，$\boldsymbol{R}H^m$ および $\boldsymbol{C}H^m$ の理想境界として，それぞれの多様体の無限遠点のなす集合と同一視される．

Carnot 空間 $M=(G,g)$ は，このような実双曲型空間や複素双曲型空間の一般化として定義される負曲率等質 Riemann 多様体であり，Carnot 群とよばれる次数つき巾零 Lie 群 N の 1 次元可解拡大 $G=N\rtimes\boldsymbol{R}$ に左不変負曲率 Riemann 計量 g をあたえたものとしてえられる．また，Carnot 空間 M の無限遠点のなす集合は Carnot 群 N の 1 点コンパクト化と自然に同一視され，M の理想境界をあたえる．

本稿では，このような Carnot 空間の間の固有 (proper) な調和写像の理想境界（無限遠境界）のまわりでの漸近挙動および無限遠境界値と Carnot 群の構造との関係について論じる．

1 調和写像の定義

$M=(M,g)$ と $M'=(M',g')$ をそれぞれ m および m' 次元 Riemann 多様体とし，$u: M\to M'$ を M から M' への C^2 級写像とする．写像 u の微分 $du: TM\to TM'$ に対して，$X,Y\in\Gamma(TM)$ を M 上のベクトル場とし，∇^{TM} と $\nabla^{u^{-1}TM'}$ をそれぞれ M の Levi-Civita 接続および M' の Levi-Civita 接続の u による引き戻しとするとき，du の共変微分 ∇du が

$$\nabla du(X,Y)=\nabla_X^{u^{-1}TM'}du(Y)-du(\nabla_X^{TM}Y)$$

で定義される．u が等長的はめ込みのとき，∇du は Riemann 部分多様体 $u(M)\subset M'$ の第 2 基本形式に他ならない．そこで，Riemann 部分多様体の場合の平均曲率ベクトル場の一般化として，写像 u の**テンション場**とよばれる u に沿ったベクトル場 $\tau(u)\in\Gamma(u^{-1}TM)$ を，$\{E_i\}$ を M 上の正規直交標構ベクトル場として

$$\tau(u)=\mathrm{Trace}_g\nabla du=\sum_{i=1}^{m}\nabla du(E_i,E_i)$$

で定義することができる．このテンション場 $\tau(u)$ が恒等的に零ベクトル場となるとき，u を M から M' への**調和写像** (harmonic map) という．

*Partly supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research (A), No. 10304004, and the Grant-in-Aid for Exploratory Research, No. 12874008, of the Japan Society for the Promotion of Science.

M の局所座標系 (x^i) および M' の局所座標系 (x'^α) のもとで，M と M' の Riemann 計量 g と g' はそれぞれ

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} dx^i dx^j, \quad g' = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m'} g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta$$

と表示され，写像 u は

$$u(x) = \Big(u^1(x^1, \cdots, x^m), \cdots, u^{m'}(x^1, \cdots, x^m)\Big) = \big(u^\alpha(x^i)\big)$$

とあらわすことができる．このとき

$$e(u) = |du|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m'} g^{ij} g'_{\alpha\beta}(u) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j}$$

で定義される C^1 級関数 $e(u) : M \to \boldsymbol{R}$ を u の**エネルギー密度**といい，M の相対コンパクトな領域 $\Omega \Subset M$ に対して，Ω 上で $e(u)$ を積分した値

$$E_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega e(u) d\mu_g$$

を u の Ω での**エネルギー**という．ここに μ_g は Riemann 計量 g から M 上に定義される標準的な測度をあらわす．

M から M' への C^2 級写像全体のなす空間を $C^2(M, M')$ とするとき，写像のエネルギー $E_\Omega(u)$ は写像空間 $C^2(M, M')$ 上の汎関数を定義していると考えられる．このとき，調和写像はこのエネルギー汎関数 $E_\Omega : C^2(M, M') \to \boldsymbol{R}$ の臨界点をあたえる写像に他ならない．すなわち調和写像の定義方程式 $\tau(u) = 0$ は，このエネルギー汎関数の Euler-Lagrange 方程式

$$\Delta u^\alpha + \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\beta,\gamma=1}^{m'} g^{ij} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(u) \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^j} = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, m' \tag{1}$$

に他ならない．ここで，Δ は M 上の Laplace-Beltrami 作用素であり，$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ は M' 上の Christoffel の記号をあらわす．(1) 式は M 上の 2 階準線形楕円型偏微分方程式系である．したがって，その解である C^2 級の調和写像は実は C^∞ 級写像となることがわかる．

調和写像の例は，微分幾何学のいろいろな局面にあらわれる．たとえば $M' = \boldsymbol{R}$ のとき，エネルギーは関数 $u : M \to \boldsymbol{R}$ の Dirichlet 積分に等しく，(1) 式は Laplace の方程式 $\Delta u^\alpha = 0$ となり，調和写像 u は調和関数に他ならない．一方 $M = \boldsymbol{R}$ のとき，エネルギーは曲線 $u : \boldsymbol{R} \to M'$ の通常のエネルギー積分に一致し，(1) 式は測地線の方程式

$$\frac{d^2 u^\alpha}{dt^2} + \sum_{\beta,\gamma=1}^{m'} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(u) \frac{du^\beta}{dt} \frac{du^\gamma}{dt} = 0$$

となり，調和写像は M' 上の測地線に他ならない．また M と M' が Kähler 多様体のときには，M から M' への正則（反正則）写像が調和写像となることがわかる．

2　固有調和写像

m (≥ 2) 次元完備かつ連結な Riemann 多様体 (M, g) が Hadamard 多様体であるとは，単連結かつ断面曲率がつねに非正であるときをいう．このような多様体の位相構造は非常に単純で，M は

m 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^m$ と微分同相となる．また，Euclid 空間の平行な半直線は同じ無限遠点を定める（すなわち無限遠点のみで交わっている）と考えられるが，Hadamard 多様体の場合にも漸近する測地的半直線は同じ無限遠点を定めていると考えることにより，無限遠点のなす集合 $M(\infty)$ を定義することができる ([1])．$M(\infty)$ を Hadamard 多様体 M の（幾何学的）**理想境界**という．M に理想境界 $M(\infty)$ をつけ加えた集合 $\overline{M} = M \cup M(\infty)$ には，M を稠密な開集合として含む自然な位相が定義でき，そのもとで $M(\infty)$ は $m-1$ 次元球面 S^{m-1} と，また $\overline{M}$ は m 次元閉球体 $\overline{B^m}$ と同相となることがわかる．この $\overline{M}$ を M の**幾何学的コンパクト化**，あるいは Eberlein-O'Neill のコンパクト化という．

例 1　最も典型的な場合として，M と M' が実双曲型空間である場合について考えてみよう．たとえば，$m = m' = 2$ とし，M と M' を Poincaré の円板モデル

$$\boldsymbol{R}H^2 = \left(\{ z \in \boldsymbol{C} \mid |z| < 1 \}, \quad g_P = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} \right)$$

で考えると，容易にわかるように $\boldsymbol{R}H^2$ の 2 つの測地的半直線が漸近的となるのは単位円板の境界の円周 S^1 と同じ点で交わる場合に他ならないので，理想境界 $M(\infty)$ と $M'(\infty)$ は自然に単位円周 S^1 と同一視できることがわかる．

定義式から容易にわかるように，$|z| \to 1$ のとき Poincaré 計量 g_P は発散してしまい，境界上では意味をもたない．いいかえると，対応する Laplace-Beltrami 作用素は理想境界上のすべての点で退化する偏微分作用素となっている．この状況は，実双曲型空間の Poincaré の上半平面モデル

$$\boldsymbol{H}_+ = \left(\{ z = x + \sqrt{-1}y \in \boldsymbol{C} \mid y > 0 \}, \quad g_H = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \right)$$

を考えると，より理解しやすい．実際，この上半平面モデルは Cayley 変換 $\Phi : \boldsymbol{H}_+ \to \boldsymbol{R}H^2$

$$\Phi(z) = \sqrt{-1}\frac{z - \sqrt{-1}}{z + \sqrt{-1}}, \quad z \in \boldsymbol{H}_+$$

によって円板モデルと等長的に対応し，実軸 $\{ z \in \boldsymbol{C} \mid y = 0 \}$ は単位円周 S^1 と 1 点を除いて対応する．したがって，Cayley 変換 Φ は Poincaré の円板モデルの理想境界 S^1 のまわりでの座標近傍を定義していると考えることができる．いいかえると，Poincaré の円板モデル $M = \boldsymbol{R}H^2$ の幾何学的コンパクト化 $\overline{M} = \boldsymbol{R}H^2 \cup S^1$ は，Cayley 変換 Φ の族を境界のまわりの座標近傍系にとることにより自然に境界をもつ滑らかな多様体の構造をもち，上半平面の Poincaré 計量 g_H はこの座標近傍系のもとで，円板の Poincaré 計量 g_P の境界の近傍での局所表示

$$\Phi^* \left(\frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} \right) = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \tag{2}$$

に他ならないことがわかる．次元が高い場合についてもこの事情は同じである．

$M = (M, g)$ と $M' = (M', g')$ をともに Hadamard 多様体とし，それぞれの幾何学的コンパクト化 $\overline{M} = M \cup M(\infty)$ と $\overline{M'} = M' \cup M'(\infty)$ を考えよう．$u : M \to M'$ を M から M' への固有な調和写像とする．ここで u が**固有**であるとは，$\{p_j\}$ を理想境界 $M(\infty)$ へ発散していく M の点列とするとき，その像 $\{u(p_j)\}$ がまた M' の理想境界 $M'(\infty)$ へ発散していく点列となることを意味する．したがって，もし u が幾何学的コンパクト化の間の連続写像 $u : \overline{M} \to \overline{M'}$ に拡張するならば，u は M の理想境界 $M(\infty)$ を M' の理想境界 $M'(\infty)$ へ写すことになる．すなわち，u の境界値として理想境界の間の写像

$$f = u|M(\infty) : M(\infty) \to M'(\infty)$$

がえられることになる．以下，固有な調和写像 u の理想境界 $M(\infty)$ のまわりでの漸近挙動が，u の境界値 f からどの程度アプリオリに決定されるのかについて調べる．

この問題に関する最初の重要な結果は，Li と Tam [4] により M と M' がともに実双曲型空間である場合にえられた．すなわち，$M = \boldsymbol{RH}^m$ と $M' = \boldsymbol{RH}^{m'}$ の理想境界をそれぞれ単位球面 S^{m-1} および $S^{m'-1}$ と同一視するとき，C^1 級の境界値に対して調和写像の無限遠点における剛性ともいうべき次の定理がえられた．

定理 1 ([4])　$u : M = \boldsymbol{RH}^m \to M' = \boldsymbol{RH}^{m'}$ を実双曲型空間の間の固有な調和写像とし，u は C^1 級の写像 $u : \overline{M} = \boldsymbol{RH}^m \cup S^{m-1} \to \overline{M'} = \boldsymbol{RH}^{m'} \cup S^{m'-1}$ に拡張するものとする．実双曲型空間の閉球体モデルにおいて，$(\rho,\eta) = (\rho,\eta^1,\ldots,\eta^{m-1})$ と $(r,\theta) = (r,\theta^1,\ldots,\theta^{m'-1})$ をそれぞれ B^m と $B^{m'}$ における測地的極座標系とし，u を $u(\rho,\eta) = (r(\rho,\eta),\theta(\rho,\eta))$ とあらわす．このとき，u の C^1 級の境界値 $f : S^{m-1} \to S^{m'-1}$ に対して，S^{m-1} と $S^{m'-1}$ の標準的計量に関する f のエネルギー密度 $e(f)$ がつねに正ならば，u は理想境界 S^{m-1} 上の各点において

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \sqrt{\frac{e(f)}{m-1}}, \quad \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \rho} = 0, \quad 1 \le \alpha \le m'-1 \tag{3}$$

をみたす．

定理 1 の (3) 式より，$u(\rho,\eta) = (r(\rho,\eta),\theta(\rho,\eta))$ は理想境界 S^{m-1} のまわりで，$\rho \to 0$ のとき

$$r(\rho,\eta) = 1 - (1-\rho)\sqrt{e(f)(\eta)/(m-1)} + o(1-\rho),$$
$$\theta^\alpha(\rho,\eta) = f^\alpha(\eta) + o(1-\rho), \quad 1 \le \alpha \le m'-1$$

と Tayler 展開されることがわかる．この表示をもちいて，Li と Tam は C^1 級の境界値をもつ固有な調和写像の一意性を証明している．すなわち，u と v を $\boldsymbol{RH}^m$ から $\boldsymbol{RH}^{m'}$ への固有な調和写像で，それぞれの幾何学的コンパクト化の間に C^1 級の写像として拡張するものとする．このとき，u と v が同じ境界値 f をもち，かつそのエネルギー密度 $e(f)$ がつねに正ならば，u と v は一致することを示した．しかしながら，理想境界まで C^1 級にのびない調和写像については，一般に一意性がなりたつとは限らず，状況はより複雑となる．実際，Li と Tam [4] は 2 次元実双曲型空間 $\boldsymbol{RH}^2$ の調和微分同相写像の族で，境界値はすべて恒等写像，かつ理想境界上の 1 点において 1/2 次の Hölder 連続性でしかのびない例を構成している．

3　負曲率等質多様体

固有な調和写像の漸近挙動をより広い観点から考察するために，以下 $M = (M,g)$ を m 次元 Hadamard 多様体とし，M は等質である，すなわち M の等長変換群 $I(M,g)$ が M 上に推移的に作用すると仮定しよう．

このとき，実は M は自然に可解 Lie 群の構造をもち，Riemann 計量 g は M 上の左不変計量となることがわかる．すなわち，等質 Hadamard 多様体は群多様体となるわけである．実際，等長変換群 $I(M,g)$ の単位元の連結成分 $I_0(M,g)$ 内に，M に単純かつ推移的に作用する可解部分群 G が存在し ([3])，その作用により M と G を同一視することができる．

たとえば，M が非コンパクト型対称 Riemann 空間の場合には，$I_0(M,g)$ は岩沢分解により半直積 $N \cdot A \cdot K$ （A は可換部分群，N は巾零部分群）に分解されるが，ここで極大コンパクト部分群 K はある点 $x \in M$ における $I_0(M,g)$ の固定部分群にほかならないので，$G = N \cdot A$ とおいて求める可解部分群をえることができる．

とくに (M,g) の断面曲率が負であれば，実はこの可解 Lie 群 G は単連結巾零 Lie 群 $N=[G,G]$（G の交換子群）と可換群 $\boldsymbol{R}$ の半直積 $N \rtimes \boldsymbol{R}$ となることがわかる．実際，G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して導来イデアル $\mathfrak{n}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ を考えると，$\mathfrak{g}$ が可解であるので $\mathfrak{n}$ は巾零となり，断面曲率に対する仮定より $\mathfrak{n}$ の $\mathfrak{g}$ における直交補空間は 1 次元でなければならないことがわかる．すなわち $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}+\boldsymbol{R}$ と直交直和に分解される．一方，可換群 $\boldsymbol{R}$ は対応 $\boldsymbol{R} \ni s \mapsto y=e^s \in \boldsymbol{R}_+$ により半直線 $\boldsymbol{R}_+=\{y \in \boldsymbol{R} \mid y>0\}$ と微分同相であるから，微分同相写像

$$\Phi : N \times \boldsymbol{R}_+ \ni (n,y) \mapsto n \cdot \log y \in G = N \rtimes \boldsymbol{R} \tag{4}$$

のもとで，結局 G したがって M は多様体として単連結巾零 Lie 群 N と半直線 $\boldsymbol{R}_+$ の直積 $N \times \boldsymbol{R}_+$（半空間モデル）と同一視できることがわかる．

たとえば，(M,g) が 2 次元実双曲型空間 $\boldsymbol{R}H^2$ のときには，N は可換群 $\boldsymbol{R}$ に他ならず，$N \times \boldsymbol{R}_+$ は上半平面モデル $\boldsymbol{H}_+$ と，また (4) における Φ とこの場合の G の $\boldsymbol{R}H^2$ への作用を合成したものは前節の Cayley 変換 $\Phi : \boldsymbol{H}_+ \to \boldsymbol{R}H^2$ と一致する．このことから，微分同相写像 Φ は $\boldsymbol{R}H^2$ の上半平面モデルと円板モデルの間の Cayley 変換の一般化と考えることができる．

とくに (M,g) が階数 1 の非コンパクト型対称 Riemann 空間である場合には，このようにしてえられる巾零 Lie 群 N は簡単な構造をもつことがわかる．実際，次がなりたつ．

例 2 ([3])　(M,g) を負曲率な連結対称 Riemann 空間とする．このとき，曲率テンソル R が平行，すなわち $\nabla R=0$ となることから，上の考察における N は高々2-step な巾零 Lie 群であることが導かれる．すなわち N の Lie 代数 $\mathfrak{n}$ について

$$[\mathfrak{n},[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]]=\{0\}$$

がなりたつ．いいかえると $\mathfrak{n}$ は可換 Lie 代数に最も近い非可換な巾零 Lie 代数に他ならない．

したがって，$\mathfrak{n}$ の導来イデアルを $\mathfrak{n}_2=[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ とおき，$\mathfrak{n}_2$ の $\mathfrak{n}$ における直交補空間を $\mathfrak{n}_1$ とするとき，$\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2$ は次数つき Lie 代数の構造をもつ．すなわち，$\mathfrak{n}_i=\{0\}$ $(i \geq 3)$ として

$$[\mathfrak{n}_i,\mathfrak{n}_j] \subset \mathfrak{n}_{i+j}, \quad i,j=1,2$$

がなりたつ．

しかも，$\boldsymbol{R}_+$ の Lie 代数 $\boldsymbol{R}$ の元 H が存在して，各 $\mathfrak{n}_i$ は H に対する随伴表現 $\mathrm{ad}(H):\mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ の固有値 λ および 2λ $(0 \neq \lambda \in \boldsymbol{R})$ の固有空間となることがわかる．すなわち各 $\mathfrak{n}_i$ について

$$\mathfrak{n}_i=\{X \in \mathfrak{n} \mid \mathrm{ad}(H)X=i\lambda X\}, \quad i=1,2$$

がなりたつ．

例 2 において，$\mathfrak{n}$ の導来イデアル $\mathfrak{n}_2$ の次元は $0,1,3,7$ のいずれかに限り，それぞれ実双曲型空間 $\boldsymbol{R}H^m$，複素双曲型空間 $\boldsymbol{C}H^m$，四元数双曲型空間 $\boldsymbol{H}H^m$，Cayley 双曲平面 $\mathrm{Ca}H^2$ の場合に対応している．

例 3　複素双曲型空間 $\boldsymbol{C}H^m$ は，m 次元複素 Euclid 空間 $\boldsymbol{C}^m$ 内の単位開球体 B^{2m} に Bergman 計量とよばれる Kähler 計量 g_B をあたえたものとしてえられる．すなわち

$$\boldsymbol{C}H^m=\left(\{z \in \boldsymbol{C}^m \mid |z|<1\},\ g_B=\sum_{i,j=1}^{m} 4\frac{\partial^2(-\log(1-|z|^2))}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} dz^i d\bar{z}^j\right)$$

であり，$m=1$ のとき，$\boldsymbol{CH}^1$ は実双曲型空間 $\boldsymbol{RH}^2$ の Poincaré の円板モデルに他ならない．

実双曲型空間の場合と同様に，複素双曲型空間 $\boldsymbol{CH}^m$ の理想境界 $M(\infty)$ は開球体 B^{2m} の境界である $2m-1$ 次元単位球面 S^{2m-1} と自然に同一視される．さらに，特殊ユニタリー群 $SU(1,m)$ が複素双曲型空間 $\boldsymbol{CH}^m$ 上に等長変換として働き，たとえば B^{2m} の原点における固定部分群 K は $SU(1,m)$ の極大コンパクト部分群に他ならないことがわかる．実際，$SU(1,m)$ の岩沢分解は $SU(1,m)=N\cdot A\cdot K$（N は Heisenberg 群とよばれる 2-step 巾零部分群，A は 1 次元可換部分群，K は $U(m)$ と同型）であたえられ，$G=N\rtimes A$ とおいて $\boldsymbol{CH}^m$ に単純かつ推移的に働く可解部分群がえられる ([5])．

巾零部分群 N の Lie 代数 $\mathfrak{n}$ を，例 2 のように次数つき Lie 代数として $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2$ と分解し，$\mathfrak{n}_1$ と $\mathfrak{n}_2$ を N の単位元における接空間 T_eN の部分空間と同一視するとき，これらは N の左移動によって，N の接ベクトル束の部分束（分布）を定める．このとき，一般化された Cayley 変換 $\Phi: N\times \boldsymbol{R}_+\to \boldsymbol{CH}^m$ のもとで，$\boldsymbol{CH}^m$ の理想境界 S^{2m-1} は N の 1 点コンパクト化と同一視され，この同一視のもとで，$\mathfrak{n}_1$ および $\mathfrak{n}_2$ が理想境界上に定める分布は，$m-1$ 次元複素射影空間 $\boldsymbol{CP}^{m-1}$ 上の Hopf 束 $S^{2m-1}\to \boldsymbol{CP}^{m-1}$ の水平複素部分束および垂直部分束とそれぞれ一致する．したがって，Lie 代数 $\mathfrak{n}$ の部分空間 $\mathfrak{n}_1$ と $\mathfrak{n}_2$ はそれぞれ理想境界 S^{2m-1} 上の接触構造と CR 構造を定めていると考えられる．

4　カルノー空間

以上の考察のもとに，次の定義をおこう．

定義 1　単連結可解 Lie 群 G が k-step **Carnot 空間**であるとは，次をみたすときをいう．

(1) G は巾零 Lie 群 N と可換群 $\boldsymbol{R}$ の半直積 $N\rtimes \boldsymbol{R}$ である．

(2) N と G の Lie 代数をそれぞれ $\mathfrak{n}$ および $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}+\boldsymbol{R}\{H\}$ とするとき，

$$\mathfrak{n}=\sum_{i=1}^{k}\mathfrak{n}_i,\quad \mathfrak{n}_i=\{X\in\mathfrak{n}\mid \mathrm{ad}(H)X=i\lambda X\},\quad i=1,\dots,k \tag{5}$$

がなりたつ．ここに $\lambda\in\boldsymbol{R}$ は零でない定数である．

定義 1 の条件 (2) と随伴表現 $\mathrm{ad}(H)$ が Lie 代数 $\mathfrak{n}$ 上に微分として作用することから，$\mathfrak{n}=\sum_{i=1}^{k}\mathfrak{n}_i$ は次数つき Lie 代数となることが容易にわかる．すなわち，$\mathfrak{n}_i=\{0\}$ $(i>k)$ として

$$[\mathfrak{n}_i,\mathfrak{n}_j]\subset\mathfrak{n}_{i+j},\quad 1\le i,j\le k \tag{6}$$

がなりたつ．このような $\mathfrak{n}$ を Lie 代数とする単連結巾零 Lie 群 N は，一般に k-step Carnot 群とよばれる．

例 2 からわかるように，実双曲型空間 $\boldsymbol{RH}^m$ は 1-step Carnot 空間であり，複素双曲型空間 $\boldsymbol{CH}^m$，四元数双曲型空間 $\boldsymbol{HH}^m$，Cayley 双曲平面 $\mathrm{Ca}H^2$ などは 2-step Carnot 空間である．また 3-step 以上の Carnot 空間は，対称空間でない負曲率等質 Riemann 多様体の例をあたえる．

G を k-step Carnot 空間としよう．定義 1 において，G には Riemann 計量に関する条件があたえられていないが，実は条件 (2) と可解 Lie 群上の負曲率左不変計量の存在に関する Heintze [3] の判定条件から，このような G はつねに負曲率等質 Riemann 多様体となることがわかる．実際，

$\mathrm{ad}(H)$ の固有値がすべて正（または負）であることをもちいて，G 上に断面曲率がすべて負となる左不変な Riemann 計量 g を構成することができる．

そこで以下，G にこのような負曲率左不変計量 g を 1 つあたえたものを $M=(G,g)$ であらわし，単に k-step Carnot 空間とよぶことにする．

注意 1 以下，k-step Carnot 空間 $M=(G,g)$ に対して，定義 1 の条件 (2) における H はつねに長さが 1，すなわち $g(H,H)=1$ であり，かつ随伴表現 $\mathrm{ad}(H)$ の固有値がすべて正，すなわち $\lambda>0$ となるように選ぶこととする．

k-step Carnot 空間 $M=(G,g)$ はもちろん Hadamard 多様体であるから，理想境界 $M(\infty)$ をつけ加えて幾何学的コンパクト化 $\overline{M}$ を考えることができる．一方，先程みたように M は多様体として単連結巾零 Lie 群 N と半直線 $\boldsymbol{R}_+$ の直積 $N\times\boldsymbol{R}_+$ に微分同相であるが，このような微分同相をあたえる写像

$$\Phi: N\times\boldsymbol{R}_+\ni(n,y)\mapsto n\cdot\exp sH\in G=N\rtimes\boldsymbol{R} \tag{7}$$

は一般化された Cayley 変換として，2 次元実双曲型空間 $\boldsymbol{R}H^2$ の場合の Cayley 変換 $\boldsymbol{H}_+\to\boldsymbol{R}H^2$ と同様に，理想境界のまわりの座標近傍系の役割を果たす．ここに $s=\log y$ であり，H は注意 1 の条件をみたすとする．

このとき定義 1 の条件 (2) から，このような座標近傍系のもとで，M の Riemann 計量 g は理想境界のまわりで次のような表示をもつことがわかる．

命題 1 ([5]) $M=(G,g)$ を k-step Carnot 空間とし，$\Phi:N\times\boldsymbol{R}_+\to G$ を一般化された Cayley 変換とする．このとき

$$\Phi^*g=\frac{1}{y^{2\lambda}}g_{\mathfrak{n}_1}+\frac{1}{y^{4\lambda}}g_{\mathfrak{n}_2}+\cdots+\frac{1}{y^{2\lambda k}}g_{\mathfrak{n}_k}+\frac{dy^2}{y^2} \tag{8}$$

がなりたつ．ここに y は半直線 $\boldsymbol{R}_+$ の座標関数であり，λ は定義 1 の条件 (2) であたえられ，$g_{\mathfrak{n}_1}+g_{\mathfrak{n}_2}+\cdots+g_{\mathfrak{n}_k}$ は N 上の左不変 Riemann 計量 $\Phi^*g|N\times\{1\}$ をあらわす．

命題 1 の (8) 式より，随伴表現 $\mathrm{ad}(H)$ の固有値 $i\lambda$ は k-step Carnot 空間の Riemann 計量 g の発散のオーダーに反映され，かつ g は理想境界のまわりで非常に非等方的であることがわかる．

例 4 実双曲型空間 $\boldsymbol{R}H^m$ の場合，N は可換群であるので $k=1$ であり，定義 1 の条件 (2) における H を標準的に選ぶとき，$\lambda=1$ となる．このとき，$\boldsymbol{R}H^m$ の上半空間モデル $\boldsymbol{R}^{m-1}\times\boldsymbol{R}_+\cong N\times\boldsymbol{R}_+$ の標準的座標系 $(x^1,\ldots,x^{m-1},y)$ に関して，Poincé 計量 g_P は

$$\Phi^*g_P=\frac{1}{y^2}\left[(dx^1)^2+\cdots+(dx^{m-1})^2\right]+\frac{dy^2}{y^2}$$

とあらわされる．

例 5 複素双曲型空間 $\boldsymbol{C}H^m$ の場合，例 3 でみたように N は Heisenberg 群であるから $k=2$ であり，定義 1 の条件 (2) における H を標準的に選ぶとき，$\lambda=1/2$ となることがわかる．このとき，Heisenberg 群 $N\cong\boldsymbol{C}^{m-1}\times\boldsymbol{R}$ の標準的座標系 $(z^1,\ldots,z^{m-1},t)$ に関して，Bergman 計量 g_B は

$$\Phi^*g_B=\frac{1}{y}\sum_{i=1}^{m-1}\left|dz^i\right|^2+\frac{1}{y^2}\left|dt+\sum_{i=1}^{m-1}\sqrt{-1}(z^id\bar{z}^i-\bar{z}^idz^i)/2\right|^2+\frac{dy^2}{y^2}$$

とあらわされる．ここで dz^i と $dt+\sum_{i=1}^{m-1}\sqrt{-1}(z^id\bar{z}^i-\bar{z}^idz^i)/2$ は N 上の左不変 1 次微分形式であることに注意 ([5])．

また (8) 式より，k-step Carnot 空間 $M=(G,g)$ の半空間モデル $N\times \boldsymbol{R}_+$ において，半直線 $\boldsymbol{R}_+$ に平行な方向 $\{(n,y)\mid n=\mathrm{const}\}$ は互いに漸近する測地的半直線を定め，このような測地的半直線族が定める無限遠点を $\infty\in M(\infty)$ とするとき，$M(\infty)\setminus\{\infty\}$ は $N\times\{0\}$ と同一視されることが容易に確かめられる．いいかえると，M の理想境界 $M(\infty)$ から 1 点を除くと巾零 Lie 群の構造をもつというわけである．

5 理想境界上の微分構造

§3 や §4 における一般化された Cayley 変換の定義式 (4) および (7) において，半空間モデル $N\times\boldsymbol{R}_+$ を構成する際の直線 $\boldsymbol{R}$ と半直線 $\boldsymbol{R}_+$ の間の微分同相写像の選び方は一意的ではなく，また一般の k-step Carnot 空間 $M=(G,g)$ に対してどのような選び方が標準的であるのかはアプリオリには決められない．実際，たとえば (4) において $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}_+$ の同一視を $\boldsymbol{R}\ni s\mapsto y=e^{\alpha s}\in\boldsymbol{R}_+$ と取れば，命題 1 における Φ^*g の表示は

$$\Phi^*g=\frac{1}{y^{2\lambda/\alpha}}g_{\mathfrak{n}_1}+\frac{1}{y^{4\lambda/\alpha}}g_{\mathfrak{n}_2}+\cdots+\frac{1}{y^{2\lambda k/\alpha}}g_{\mathfrak{n}_k}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{dy^2}{y^2} \tag{9}$$

となり，Riemann 計量 g は M の理想境界 $M(\infty)$ のまわりで (8) 式の場合とは異なったオーダーで発散することになる．

さらに，一般化された Cayley 変換 $\Phi:N\times\boldsymbol{R}_+\to G$ を理想境界 $M(\infty)$ のまわりの座標近傍系と取るとき，直線 $\boldsymbol{R}$ を半直線 $\boldsymbol{R}_+$ と同一視する指数関数の選び方を変えると，半空間モデル $N\times\boldsymbol{R}_+$ に対して $M(\infty)$ において異なる微分構造を定義することになる．実際，$y=e^s$ と $y=e^{\alpha s}$ の間の座標変換は，$\alpha\neq 1$ のとき $y=0$ において微分同相とはならない．

注意 2 $\alpha\in\boldsymbol{R}$ を零でない定数とし，(5) 式における λ を λ/α に取り替えると，命題 1 から容易にわかるように半空間モデル $N\times\boldsymbol{R}_+$ において，Riemann 計量 g は理想境界 $M(\infty)$ のまわりで (9) 式の場合と同じオーダーで発散することになる．

以上見たように，定義 1 の条件 (2) における随伴表現 $\mathrm{ad}(H)$ の固有値は，Carnot 空間 $M=(G,g)$ の理想境界 $M(\infty)$ における微分構造と密接に関係する．したがってまた，Carnot 空間の間の固有な調和写像の理想境界のまわりでの漸近挙動にも大きな影響を及ぼすことになる．その様子をより詳しく調べる前に，まず次の事実に注意しておこう．

$M=(M,g)$ を例 3 における複素双曲型空間 $\boldsymbol{C}H^m$ とし，$M'=(M',g')$ を例 1 における実双曲型空間 $\boldsymbol{R}H^{m'}$ とする．G および G' の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ は，それぞれ次数つき Lie 代数として

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2+\boldsymbol{R}\{H\},\quad \mathfrak{g}'=\mathfrak{n}_1'+\boldsymbol{R}\{H'\}$$

と分解され，M と M' の半空間モデル $N\times\boldsymbol{R}_+$ および $N'\times\boldsymbol{R}_+$ 上で Riemann 計量 g と g' は

$$\Phi^*g=\frac{1}{y^{2\lambda}}g_{\mathfrak{n}_1}+\frac{1}{y^{4\lambda}}g_{\mathfrak{n}_2}+\frac{dy^2}{y^2},\quad \Phi'^*g'=\frac{1}{y'^{2\mu}}\sum_{\alpha=1}^{m'-1}(dx'^{\alpha})^2+\frac{dy'^2}{y'^2}$$

とあらわされるとする．

ここで，H と H' を例 4 および例 5 でみたように標準的に選ぶとき，随伴表現 $\mathrm{ad}(H)$ と $\mathrm{ad}(H')$ の固有値はそれぞれ $\lambda=1/2$ および $\mu=1$ となる．このとき，M から M' への固有調和写像の存在に関して次が知られる．

定理 2 ([9]) $\lambda = 1/2$ および $\mu = 1$ かつ $m, m' \geq 2$ とする．このとき，$M = \boldsymbol{C}H^m$ から $M' = \boldsymbol{R}H^{m'}$ への固有な調和写像 $u : M \to M'$ で理想境界まで C^1 級の写像として拡張するものは存在しない．

しかしながら，$\lambda = \mu = 1$ と選び，一般化された Cayley 変換 Φ と Φ' を理想境界のまわりの座標近傍系と取るとき，Φ は M の理想境界 $M(\infty)$ 上に新しい微分構造を定義し，次がなりたつ．

定理 3 ([2]) $\lambda = \mu = 1$ とし，f を理想境界 $M(\infty) = S^{2m-1}$ から $M'(\infty) = S^{m'-1}$ への C^1 級写像とする．このとき，f のエネルギー密度 $e(f)$ がつねに正ならば，$M = \boldsymbol{C}H^m$ から $M' = \boldsymbol{R}H^{m'}$ への固有な調和写像 $u : M \to M'$ で理想境界まで連続，かつ f を境界値とするものが存在する．

6 調和写像の定義方程式

$M = (G, g)$ と $M' = (G', g')$ をそれぞれ k-step Carnot 空間および l-step Carnot 空間とし，M と M' の次元をそれぞれ $m, m' \geq 2$ とする．定義より，G と G' は k-step Carnot 群 N と l-step Carnot 群 N' の 1 次元可解拡大として，半直積 $G = N \rtimes \boldsymbol{R}$ および $G' = N' \rtimes \boldsymbol{R}$ とあらわされ，G と G' の Lie 代数はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} &= \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{n}_i, \quad \mathfrak{n}_i = \{X \in \mathfrak{n} \mid \mathrm{ad}H(X) = i\lambda X\}, \quad i = 1, \ldots, k, \\ \mathfrak{n}' &= \sum_{j=1}^{l} \mathfrak{n}'_j, \quad \mathfrak{n}'_j = \{X \in \mathfrak{n}' \mid \mathrm{ad}H'(X) = j\mu X\}, \quad j = 1, \ldots, l \end{aligned} \tag{10}$$

と分解される．ここで H と H' は注意 1 の条件をみたし，一般化された Cayley 変換 $\Phi : N \times \boldsymbol{R}_+ \to G$ および $\Phi' : N' \times \boldsymbol{R}_+ \to G'$ のもとで，Riemann 計量 g と g' は半空間モデル $N \times \boldsymbol{R}_+$ および $N' \times \boldsymbol{R}_+$ 上で

$$\begin{aligned} \Phi^* g &= \frac{1}{y^{2\lambda}} g_{\mathfrak{n}_1} + \frac{1}{y^{4\lambda}} g_{\mathfrak{n}_2} + \cdots + \frac{1}{y^{2\lambda k}} g_{\mathfrak{n}_k} + \frac{dy^2}{y^2}, \\ \Phi'^* g' &= \frac{1}{y'^{2\mu}} g'_{\mathfrak{n}'_1} + \frac{1}{y'^{4\mu}} g'_{\mathfrak{n}'_2} + \cdots + \frac{1}{y'^{2\mu l}} g'_{\mathfrak{n}'_k} + \frac{dy'^2}{y'^2} \end{aligned} \tag{11}$$

とあらわされることに注意．ここに y と y' はそれぞれ半直線 $\boldsymbol{R}_+$ 上の座標関数をあらわす．

半空間モデル $N \times \boldsymbol{R}_+$ と $N' \times \boldsymbol{R}_+$ において，半直線 $\boldsymbol{R}_+$ と平行な方向が定める無限遠点をそれぞれ ∞ と ∞' とすると，M と M' の理想境界 $M(\infty) \setminus \{\infty\}$ と $M'(\infty) \setminus \{\infty'\}$ は，それぞれ $N \times \{0\}$ および $N' \times \{0\}$ と自然に同一視される．また，例 3 でみた複素双曲型空間の場合と同様に，次数つき Lie 代数としての分解 $\mathfrak{n} = \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{n}_i$ および $\mathfrak{n}' = \sum_{j=1}^{l} \mathfrak{n}'_j$ から，各部分空間 $\mathfrak{n}_i$ と $\mathfrak{n}'_j$ がそれぞれ Carnot 群 N および N' 上に左移動によって定める分布がえられる．以下，それらを各々同じ記号であらわすことにする．すなわち $(\mathfrak{n}_i)_p$ は $\mathfrak{n}$ の部分空間 $\mathfrak{n}_i$ を N の左移動で点 $p \in N$ まで移したものをあらわし，$(\mathfrak{n}'_j)_q$ は $\mathfrak{n}'$ の部分空間 $\mathfrak{n}'_j$ を N' の左移動で点 $q \in N'$ まで移したものをあらわす．これらの分布は理想境界 $M(\infty) \setminus \{\infty\}$ および $M'(\infty) \setminus \{\infty'\}$ 上に定義された幾何構造とみなすことができる．

さて，$u : M \to M'$ を M から M' への固有な C^∞ 級写像としよう．u が M と M' の幾何学的コンパクト化 $\overline{M}$ および $\overline{M'}$ の間の写像に拡張されるとき，u の境界値すなわち u が理想境界の間に誘導する写像を

$$f = u | M(\infty) : M(\infty) \to M'(\infty)$$

とおく．以下，u が調和写像であるときに，境界値 f がみたすべき条件を求める．

具体的計算を実行するために，M と M' の半空間モデル $N \times \boldsymbol{R}_+$ と $N' \times \boldsymbol{R}_+$ において，標構ベクトル場 $\{e_i\}$ と $\{e'_\alpha\}$ を次のように定めよう．まず，$e_0 = \partial/\partial y$ および $e'_0 = \partial/\partial y'$ とし，添え字 $1 \leq A \leq k$ と $1 \leq P \leq l$ に対して，$n_A = \dim \mathfrak{n}_A$ および $n'_P = \dim \mathfrak{n}'_P$ とおく．次に各 $\mathfrak{n}_A$ に対して，左不変計量 $g_{\mathfrak{n}_A}$ に関する正規直交基底 $\{e_{A_i}\}$, $1 \leq i \leq n_A$ を選び，N 上の左不変ベクトル場に拡張する．このとき，(6) より $[\mathfrak{n}_A, \mathfrak{n}_B] \subset \mathfrak{n}_{A+B}$ であるから，N の構造定数を

$$[e_{A_i}, e_{B_j}] = \sum_{r=1}^{n_{A+B}} a_{A_i B_j}^{(A+B)_r} e_{(A+B)_r}, \quad 1 \leq A, B \leq k$$

とあらわすことができ，かつ他のブラケット積はすべて自明となることに注意．同様に，各 $\mathfrak{n}'_P$ に対して，左不変計量 $g'_{\mathfrak{n}'_P}$ に関する正規直交基底 $\{e'_{P_\alpha}\}$, $1 \leq \alpha \leq n'_P$ を選び，N' 上の左不変ベクトル場に拡張するとき，N' の構造定数は

$$[e'_{P_\alpha}, e'_{Q_\beta}] = \sum_{\gamma=1}^{n'_{P+Q}} b_{P_\alpha Q_\beta}^{(P+Q)_\gamma} e'_{(P+Q)_\gamma}, \quad 1 \leq P, Q \leq l$$

とあらわすことができ，他のブラケット積はすべて自明となる．

このように選んだ標構ベクトル場 $\{e_i\}$ と $\{e'_\alpha\}$ に関して，写像 u の微分 du およびテンション場 $\tau(u)$ を

$$du = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\alpha=0}^{m'-1} u_i^\alpha e_i{}^* \otimes e'_\alpha, \quad \tau(u) = \sum_{\alpha=0}^{m'-1} \tau(u)^\alpha e'_\alpha$$

と成分表示する．ここに $\{e_i^*\}$ は $\{e_i\}$ の双対ベクトル場をあらわす．

このとき，半空間モデル $N \times \boldsymbol{R}_+$ および $N' \times \boldsymbol{R}_+$ における Riemann 計量 g と g' の表示式 (11) からの直接的帰結として，Carnot 空間の間の固有な調和写像の漸近挙動を調べる際の基本的手段となる，テンション場 $\tau(u)$ に関する次の表示式がえられる．

命題 2 $u : M \to M'$ を k-step Carnot 空間 M から l-step Carnot 空間 M' への C^2 級写像で，半空間モデル $N \times \boldsymbol{R}_+$ を $N' \times \boldsymbol{R}_+$ へ写すものとする．このとき，上記の標構ベクトル場に関して，u のテンション場 $\tau(u)$ の成分表示は次であたえられる．

$$\begin{aligned}
\tau(u)^0 &= \sum_{i=0}^{m-1} g^{ii}\big(e_i \cdot u_i^0\big) + \Big(1 - \lambda \sum_{A=1}^{k} A \cdot n_A\Big) y u_0^0 - (y' \circ u)^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} g^{ii}\big(u_i^0\big)^2 \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m-1} g^{ii} \sum_{P=1}^{l} \mu P (y' \circ u)^{-2\mu P + 1} \sum_{\beta=1}^{n'_P} \big(u_i^{P_\beta}\big)^2, \\
\tau(u)^{P_\alpha} &= \sum_{i=0}^{m-1} g^{ii}\big(e_i \cdot u_i^{P_\alpha}\big) + \Big(1 - \lambda \sum_{A=1}^{k} A \cdot n_A\Big) y u_0^{P_\alpha} - 2\mu P (y' \circ u)^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} g^{ii} u_i^{P_\alpha} u_i^0 \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m-1} g^{ii} \sum_{Q=1}^{l-P} (y' \circ u)^{-2\mu Q} \sum_{\beta=1}^{n'_Q} \sum_{\gamma=1}^{n'_{P+Q}} b_{P_\alpha Q_\beta}^{(P+Q)_\gamma} u_i^{Q_\beta} u_i^{(P+Q)_\gamma}
\end{aligned} \tag{12}$$

ここに $1 \leq P \leq l$ および $1 \leq \alpha \leq n'_P$ である．

ここで，g^{ij} は Riemann 計量 g の反変的成分，すなわち $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ から定まる行列 (g_{ij}) の逆行列 (g^{ij}) の成分をあらわす．また，(12) 式における $\tau(u)^{P_\alpha}$ の第 4 項は，$P = l$ のときには現れないことに注意．

7　調和写像の境界値：$\lambda=\mu$ の場合

最初に，(10) において $\lambda=\mu$ である場合，いいかえると (11) において Riemann 計量 g と g' が半空間モデルの理想境界 $N\times\{0\}$ および $N'\times\{0\}$ のまわりで同じオーダーで発散する場合について，固有な調和写像の境界値がみたすべき条件を調べてみよう．以下，議論を簡単にするために $\lambda=\mu=1$ とする．

$u:M\to M'$ を k-step Carnot 空間 M から l-step Carnot 空間 M' への固有な C^∞ 級写像とし，u は $N\times\boldsymbol{R}_+$ を $N'\times\boldsymbol{R}_+$ へ写し，かつ理想境界 $N\times\{0\}$ および $N'\times\{0\}$ まで C^1 級の写像として拡張するとしよう．すなわち

$$u\in C^\infty(N\times\boldsymbol{R}_+,\,N'\times\boldsymbol{R}_+)\cap C^1(N\times[0,\infty),\,N'\times[0,\infty))$$

と仮定し，u のテンション場 $\tau(u)$ の理想境界のまわりでの漸近挙動について調べる．

まず，(12) 式における $\tau(u)$ の成分 $\tau^0(u)$ に対して，各整数 $1\le B\le l$ について $(y'\circ u)^{2l-1}y^{-2B}$ を考え $y\to0$ とすることにより，次の補題をえる．

補題 1　$u:M\to M'$ を k-step Carnot 空間 M から l-step Carnot 空間 M' への固有な C^∞ 級写像とし，$u\in C^\infty(N\times\boldsymbol{R}_+,\,N'\times\boldsymbol{R}_+)\cap C^1(N\times[0,\infty),\,N'\times[0,\infty))$ とする．このとき各整数 $1\le B\le l$ に対して，テンション場 $\tau(u)$ の成分 $\tau^0(u)$ は次をみたす．

(1)　$y\to0$ のとき，$\tau(u)^0\times(y'\circ u)^{2l-1}y^{-2B}$ の最初の 3 項は $B<l$ ならば 0 に収束し，$B=l$ のときは

$$-\Big(\sum_{A=1}^{k}An_A\Big)\big(u_0^0\big)^{2l}$$

に収束する．

(2)　$\tau(u)^0\times(y'\circ u)^{2l-1}y^{-2B}$ の第 4 項は，$m(B,P)=\min\{B+P-l,k\}$ とおくとき

$$\sum_{P=l-B+1}^{l}P\sum_{\beta=1}^{n'_P}\big(y^{-B+1}(y'\circ u)^{l-P}u_0^{P_\beta}\big)^2 + \sum_{P=l-B+1}^{l}\ \sum_{A=1}^{m(B,P)}P\sum_{i=1}^{n_A}\sum_{\beta=1}^{n'_P}\big(y^{A-B}(y'\circ u)^{l-P}u_{A_i}^{P_\beta}\big)^2+o(1)$$

となる．

とくに u が調和写像ならば，$\tau(u)^0=0$ であるから，補題 1 における $B=1$ の場合より，固有な調和写像の C^1 級の境界値がみたすべき条件として次がえられる．

補題 2　補題 1 の仮定のもとで，u が調和写像ならば，理想境界 $N\times\{0\}$ 上で次がなりたつ．

(1)　$l=1$ ならば

$$\Big(\sum_{A=1}^{k}An_A\Big)\big(u_0^0\big)^2=\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{\beta=1}^{n'_1}\big(u_i^{1_\beta}\big)^2.$$

(2)　$l>1$ ならば，任意の $1\le i\le n_1$ と $1\le\beta\le n'_l$ に対して

$$u_0^{l_\beta}=0,\quad u_{1_i}^{l_\beta}=0.$$

たとえば，u が複素双曲型空間 CH^m の間の固有な調和写像ならば，$k=l=2$ かつ $n'_l=1$ であるから，補題 2 の (2) より，各 $1 \le i \le n_1$ に対して理想境界上で $u^1_i=0$ となることがわかる．いいかえると，CH^m の半空間モデル $N \times \boldsymbol{R}_+$ において，u の C^1 級の境界値 f は $N \times \{0\}$ 上で

$$df_p((\mathfrak{n}_1)_p) \subset (\mathfrak{n}'_1)_{f(p)}, \quad p \in N \times \{0\}$$

をみたすことがわかる．このことは，固有な調和写像 $u: CH^m \to CH^m$ の境界値 $f: S^{2m-1} \to S^{2m-1}$ が理想境界 S^{2m-1} 上の接触変換となることを意味する．

一般に，補題 2 の (2) は次を意味している．

系 1　$u: M \to M'$ を k-step Carnot 空間 M から l-step Carnot 空間 M' への固有な調和写像とし，$u \in C^\infty(N \times \boldsymbol{R}_+, N' \times \boldsymbol{R}_+) \cap C^1(N \times [0,\infty), N' \times [0,\infty))$ とする．このとき u の境界値 f は，任意の $p \in N \times \{0\}$ において

$$df_p((\mathfrak{n}_1)_p) \subset \sum_{j=1}^{l-1} (\mathfrak{n}'_j)_{f(p)}$$

をみたす．

固有な調和写像 u が，理想境界までより高い微分可能性をもって拡張する場合には，補題 1 から帰納的に次を導くことができる．

系 2　$l \ge 2$ かつ $1 \le r \le l-1$ とする．$u: M \to M'$ を k-step Carnot 空間 M から l-step Carnot 空間 M' への固有な調和写像とし，u は半空間モデル $N \times \boldsymbol{R}_+$ を $N' \times \boldsymbol{R}_+$ に写し，かつ理想境界 $N \times \{0\}$ および $N' \times \{0\}$ 上まで C^r 級の写像として拡張するとする．このとき，$N \times \{0\}$ 上で次がなりたつ．

(1)　任意の $l-r+1 \le P \le l$ に対して

$$e_0^s \cdot u_0^{P_\beta} = 0, \quad 0 \le s \le P-l+r-1.$$

(2)　任意の $l-r+1 \le P \le l$ と $1 \le A \le \min\{P-l+r, k\}$ に対して

$$e_0^s \cdot u_{A_i}^{P_\beta} = 0, \quad 0 \le s \le P+r-A-l.$$

一方，写像 u の微分 du の成分 u_0^0 に関して，補題 1 より理想境界上でなりたつ次の等式がえられる．

補題 3　$u: M \to M'$ を k-step Carnot 空間 M から l-step Carnot 空間 M' への固有な調和写像とし，u は半空間モデル $N \times \boldsymbol{R}_+$ を $N' \times \boldsymbol{R}_+$ に写し，かつ理想境界 $N \times \{0\}$ および $N' \times \{0\}$ 上まで C^l 級の写像として拡張するとする．このとき，$N \times \{0\}$ 上で次がなりたつ．

$$\Big(\sum_{A=1}^{k} A n_A\Big)(u_0^0)^{2l} - \sum_{P=1}^{l} P \sum_{\beta=1}^{n'_P} \{(l-1)!\}^{-2}\Big(e_0^{l-1} \cdot \big((y' \circ u)^{l-P} u_0^{P_\beta}\big)\Big)^2$$
$$- \sum_{P=1}^{l} \sum_{A=1}^{\min\{P,k\}} P \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{\beta=1}^{n'_P} \{(l-A)!\}^{-2}\Big(e_0^{l-A} \cdot \big((y' \circ u)^{l-P} u_{A_i}^{P_\beta}\big)\Big)^2 = 0.$$

$k \geq l$ のときは $\min\{P, k\} = P$ であるから，補題 3 の等式より，もし $N \times \{0\}$ 上で

$$\sum_{i=1}^{n_l} \sum_{\beta=1}^{n'_l} \left(u_{l_i}^{l_\beta}\right)^2 \neq 0 \tag{13}$$

であるならば，いいかえると u の境界値 f が任意の $p \in N \times \{0\}$ において

$$df_p((\mathfrak{n}_l)_p) \not\subset \sum_{j \neq l} (\mathfrak{n}'_j)_{f(p)} \tag{14}$$

をみたすならば，$N \times \{0\}$ 上で $u_0^0 \neq 0$ となることが容易にわかる．

この事実と $r = l - 1$ の場合の系 2 の結果を組み合わせることにより，次の命題がえられる．

命題 3　$k \geq l \geq 2$ とする．$u : M \to M'$ を k-step Carnot 空間 M から l-step Carnot 空間 M' への固有な調和写像で，半空間モデル $N \times \boldsymbol{R}_+$ を $N' \times \boldsymbol{R}_+$ に写し，かつ理想境界 $N \times \{0\}$ および $N' \times \{0\}$ 上まで C^l 級の写像として拡張し，$N \times \{0\}$ 上で (13) あるいはこれと同値な (14) をみたすものとする．このとき，$N \times \{0\}$ 上で次がなりたつ．

(1)　任意の $2 \leq P \leq l$ に対して

$$e_0^s \cdot u_0^{P_\beta} = 0, \quad 0 \leq s \leq P - 2,\ 1 \leq \beta \leq n'_P.$$

(2)　任意の $2 \leq P \leq l$ と $1 \leq A \leq \min\{P - 1, k\}$ に対して

$$e_0^s \cdot u_{A_i}^{P_\beta} = 0, \quad 0 \leq s \leq P - A - 1,\ 1 \leq \beta \leq n'_P.$$

次に，u のテンション場 $\tau(u)$ の他の成分 $\tau(u)^{P_\alpha}$ からえられる条件について考える．そのために，以下 u は理想境界 $N \times \{0\}$ および $N' \times \{0\}$ 上まで C^l 級の写像として拡張し，$N \times \{0\}$ 上で次の仮定

$$\begin{aligned} k \geq l \text{ のときは}\quad & \sum_{i=1}^{n_l} \sum_{\beta=1}^{n'_l} \left(u_{l_i}^{l_\beta}\right)^2 \neq 0, \\ k < l \text{ のときは}\quad & u_0^0 \neq 0 \end{aligned} \tag{15}$$

をみたすとする．すなわち，理想境界 $N \times \{0\}$ 上でつねに $u_0^0 \neq 0$ がなりたつ場合について考える．

この仮定のもとに，(12) 式における $\tau(u)$ の成分 $\tau(u)^{P_\alpha}$ に対して，$(y' \circ u)^{2l-P-1} y^{-2l+1}$ を考え $y \to 0$ とし，系 2 と命題 3 を用いることにより，次の補題をえる．

補題 4　$u : M \to M'$ を k-step Carnot 空間 M から l-step Carnot 空間 M' への固有な調和写像で，半空間モデル $N \times \boldsymbol{R}_+$ を $N' \times \boldsymbol{R}_+$ に写し，かつ理想境界 $N \times \{0\}$ および $N' \times \{0\}$ 上まで C^l 級の写像として拡張し，$N \times \{0\}$ 上で (15) をみたすものとする．このとき，u のテンション場 $\tau(u)$ の成分 $\tau(u)^{P_\alpha}$ は，$y \to 0$ のとき次をみたす．

(1)　任意の $1 \leq P \leq l$ に対して，$\tau(u)^{P_\alpha} \times (y' \circ u)^{2l-P-1} y^{-2l+1}$ の最初の 3 項は

$$-\{(P-1)!\}^{-1} \Bigl(\sum_{A=1}^{k} A n_A + P\Bigr) \left(u_0^0\right)^{2l-P-1} \left(e_0^{P-1} \cdot u_0^{P_\alpha}\right)$$

に収束する．

(2)　任意の $1 \leq P \leq l-1$ に対して，$\tau(u)^{P_\alpha} \times (y' \circ u)^{2l-P-1} y^{-2l+1}$ の第 4 項は

$$\sum_{Q=1}^{l-P} c_1(P,Q,1)\big(u_0^0\big)^{2l-P-2Q-1} \sum_{\beta=1}^{n'_Q} \sum_{\gamma=1}^{n'_{P+Q}} b_{P_\alpha Q_\beta}^{(P+Q)_\gamma} \big(e_0^{Q-1} \cdot u_0^{Q_\beta}\big)\big(e_0^{P+Q-1} \cdot u_0^{(P+Q)_\gamma}\big)$$

$$+ \sum_{Q=1}^{l-P} \sum_{A=1}^{\min\{Q,k\}} c_1(P,Q,A)\big(u_0^0\big)^{2l-P-2Q-1} \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{\beta=1}^{n'_Q} \sum_{\gamma=1}^{n'_{P+Q}} b_{P_\alpha Q_\beta}^{(P+Q)_\gamma} \big(e_0^{Q-A} \cdot u_{A_i}^{Q_\beta}\big)\big(e_0^{P+Q-A} \cdot u_{A_i}^{(P+Q)_\gamma}\big)$$

に収束する．ここに $c_1(P,Q,A) = \{(Q-A)!(P+Q-A)!\}^{-1}$ である．

とくに u が調和写像ならば，$\tau(u)^{P_\alpha} = 0$ であるから，この補題 4 と一般に C^2 級の写像についてなりたつ可積分条件 $ddu = 0$ および系 2 を繰り返し用いることにより，帰納的に次の定理をえることができる ([7, 8])．

定理 4　$u : M \to M'$ を k-step Carnot 空間 M から l-step Carnot 空間 M' への固有な調和写像で，半空間モデル $N \times \boldsymbol{R}_+$ を $N' \times \boldsymbol{R}_+$ に写し，かつ理想境界 $N \times \{0\}$ および $N' \times \{0\}$ 上まで C^l 級の写像として拡張し，$N \times \{0\}$ 上で (15) をみたすものとする．このとき，$N \times \{0\}$ 上で次がなりたつ．

(1)　任意の $1 \leq P \leq l$ に対して

$$e_0^r \cdot u_0^{P_\alpha} = 0, \quad 0 \leq r \leq P-1,\ 1 \leq \alpha \leq n'_P.$$

(2)　任意の $2 \leq P \leq l$ と $1 \leq A \leq \min\{P-1, k\}$ に対して

$$e_0^r \cdot u_{A_i}^{P_\alpha} = 0, \quad 0 \leq r \leq P-A,\ 1 \leq i \leq n_A,\ 1 \leq \alpha \leq n'_P.$$

(3)　u_0^0 は次の多項式をみたす．

$$\Big(\sum_{A=1}^{k} A n_A\Big)\big(u_0^0\big)^{2l} - \sum_{P=1}^{\min\{k,l\}} P\Big\{\sum_{i=1}^{n_P} \sum_{\beta=1}^{n'_P} \big(u_{P_i}^{P_\beta}\big)^2\Big\}\big(u_0^0\big)^{2(l-P)} = 0.$$

ここで，Carnot 空間の間の固有な写像の境界値に関して，次の定義をおこう．

定義 2　$k \geq l$ とする．$u : M \to M'$ を k-step Carnot 空間から l-step Carnot 空間 M' への固有な C^∞ 級写像とし，

$$u \in C^\infty(N \times \boldsymbol{R}_+,\ N' \times \boldsymbol{R}_+) \cap C^1(N \times [0,\infty),\ N' \times [0,\infty)),$$

かつ u の境界値 f について $f \in C^1(N \times \{0\}, N' \times \{0\})$ とする．このとき f が**非退化** (nondegenerate) であるとは，(13) 式と同値な条件

$$df_p((\mathfrak{n}_l)_p) \not\subset \sum_{j \neq l} (\mathfrak{n}'_j)_{f(p)}$$

が任意の $p \in N \times \{0\}$ に対してなりたつときをいう．

たとえば $k = l = 1$ 場合には，$\mathfrak{n}'_0 = \{0\}$ という約束のもとに，この条件は $df_p((\mathfrak{n}_1)_p) \neq \{0\}$，すなわち任意の $p \in N \times \{0\}$ において $df_p \neq 0$ となることを意味する．とくに u が実双曲型空間の間の固有な写像である場合，これは定理 1 で仮定された条件 $e(f) > 0$ と同値である．

この定義のもとに，定理 4 の特別な場合として次の系をえる．

系 3　$k \geq l$ とする．$u: M \to M'$ を k-step Carnot 空間 M から l-step Carnot 空間 M' への固有な調和写像で，半空間モデル $N \times \boldsymbol{R}_+$ を $N' \times \boldsymbol{R}_+$ に写し，かつ理想境界 $N \times \{0\}$ および $N' \times \{0\}$ 上まで C^l 級の写像として拡張し，u の境界値 f は非退化であるとする．このとき，$N \times \{0\}$ 上で次がなりたつ．

(1)　任意の $1 \leq P \leq l$ に対して

$$e_0^r \cdot u_0^{P_\alpha} = 0, \quad 0 \leq r \leq P-1, 1 \leq \alpha \leq n'_P.$$

(2)　任意の $2 \leq P \leq l$ と $1 \leq A \leq P-1$ に対して

$$e_0^r \cdot u_{A_i}^{P_\alpha} = 0, \quad 0 \leq r \leq P-A, 1 \leq i \leq n_A, 1 \leq \alpha \leq n'_P.$$

(3)　u_0^0 は次の多項式をみたす．

$$\Big(\sum_{A=1}^{k} An_A\Big)(u_0^0)^{2l} - \sum_{P=1}^{l} P\Big\{\sum_{i=1}^{n_P}\sum_{\beta=1}^{n'_P}(u_{P_i}^{P_\beta})^2\Big\}(u_0^0)^{2(l-P)} = 0.$$

系 3 において $r=0$ の場合を考えると，このような固有な調和写像 $u: M \to M'$ は，任意の $1 \leq A \leq P-1$ と $A+1 \leq P \leq l$ に対して，理想境界 $N \times \{0\}$ 上で $u_{A_i}^{P_\alpha} = 0$ をみたすことがわかる．このことは，u の境界値 f について，各 $1 \leq i \leq l$ と任意の $p \in N \times \{0\}$ に対して

$$df_p\Big(\sum_{j=1}^{i}(\mathfrak{n}_j)_p\Big) \subset \sum_{j=1}^{i}(\mathfrak{n}'_j)_{f(p)} \tag{16}$$

がなりたつことを意味する．すなわち，$k \geq l$ かつ $\lambda = \mu = 1$ の場合，k-step Carnot 空間 M から l-step Carnot 空間 M' への固有な調和写像 $u: M \to M'$ の境界値 f は，次数つき Lie 代数 $\mathfrak{n}$ と $\mathfrak{n}'$ がそれぞれ理想境界 $N \times \{0\}$ および $N' \times \{0\}$ 上に定義する幾何構造を完全に保つわけではないが，それらに付随する‘フィルトレーション’の構造

$$\mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 \subset \cdots \subset \sum_{j=1}^{l}\mathfrak{n}_j, \quad \mathfrak{n}'_1 \subset \mathfrak{n}'_1 + \mathfrak{n}'_2 \subset \cdots \subset \sum_{j=1}^{l}\mathfrak{n}'_j$$

を保存することがわかる．

$1 \leq i \leq n_P$ かつ $1 \leq \beta \leq n'_P$ のとき，理想境界における $u_{P_i}^{P_\beta}$ の値は，u の境界値 f のみで決まるので $f_{P_i}^{P_\beta}$ と書くことにすると，系 3 の (3) より，f が理想境界 $N \times \{0\}$ 上でみたすべき条件として

$$\Big(\sum_{A=1}^{k} An_A\Big)(u_0^0)^{2l} - \sum_{P=1}^{l-1} P\Big\{\sum_{i=1}^{n_P}\sum_{\beta=1}^{n'_P}(f_{P_i}^{P_\beta})^2\Big\}(u_0^0)^{2(l-P)} - l\sum_{i=1}^{n_l}\sum_{\beta=1}^{n'_l}(f_{l_i}^{l_\beta})^2 = 0$$

をえる．f が非退化ならば，(13) より $\sum_{i=1}^{n_l}\sum_{\beta=1}^{n'_l}\big(f_{l_i}^{l_\beta}\big)^2 > 0$ であるから，上の多項式は一意的な正値解 $u_0^0 > 0$ をもつ．したがって，$k \geq l$ かつ $\lambda = \mu = 1$ の場合，非退化な境界値 f をもつ固有な調和写像 u の微分 du の $e_0^* \otimes e'_0$ に関する成分 u_0^0 の値は，境界値 f からアプリオリに決まることがわかる．

この事実と最大値の原理から，Carnot 空間の間の固有な調和写像に関する一意性を示すことができる．すなわち，u と v を系 3 の条件をみたす固有な調和写像とし，u と v は $N \times \{0\}$ 上で同じ非退化な境界値 f をもち，かつ $u(p)$ と $v(p)$ の M' での距離 $d_{M'}(u(p), v(p))$ が $p \to \infty$ のとき $d_{M'}(u(p), v(p)) \to 0$ となるならば，u と v は M 上で一致することがわかる．

§2 でみた実双曲型空間 $\boldsymbol{RH}^m$ の場合と同様に，Carnot 空間の間の固有な調和写像 u についても，u が理想境界まで十分な微分可能性をもってのびない場合には一意性がなりたつとは限らない．実際，渡部 [10] は一般の k-step Carnot 空間に対して，理想境界上の恒等写像を境界値とする調和微分同相写像の 1 径数族を構成している．

また，系 3 の結果および (16) における'フィルトレーション'構造の保存性は，u の理想境界までの微分可能性に関する条件の適切な修正のもとに，より一般に $k \geq l$ かつ $\lambda = \mu \in \boldsymbol{N}$ が任意の自然数である場合にも，同様になりたつことが確かめられる ([8])．

注意 3　$k < l$ の場合には，系 3 の (3) は等式

$$(u_0^0)^{2(l-k)}\left[\Big(\sum_{A=1}^{k} An_A\Big)(u_0^0)^{2k} - \sum_{P=1}^{k} P\Big\{\sum_{i=1}^{n_P}\sum_{\beta=1}^{n'_P}(f_{P_i}^{P_\beta})^2\Big\}(u_0^0)^{2(k-P)}\right] = 0$$

を導くことに注意．したがって，理想境界上で $u_0^0 = 0$ となる点においては，一般に u_0^0 の値を境界値 f からアプリオリに制御することができず，状況はより複雑となる．

8　調和写像の境界値：$\lambda \neq \mu$ の場合

次に，(10) において $\lambda \neq \mu$ である場合，すなわち (11) において Riemann 計量 g と g' が半空間モデルの理想境界 $N \times \{0\}$ および $N' \times \{0\}$ のまわりで異なったオーダーで発散する場合について調べてみよう．

$u: M \to M'$ を k-step Carnot 空間 M から l-step Carnot 空間 M' への固有な調和写像とし，u は $N \times \boldsymbol{R}_+$ を $N' \times \boldsymbol{R}_+$ へ写し，かつ理想境界 $N \times \{0\}$ および $N' \times \{0\}$ まで十分な微分可能性をもって拡張するとする．この場合，一般的な状況で u の境界値 f がみたすべき条件をもとめることは複雑なので，まず典型的な場合として，k と l が 1 または 2，かつ $k\lambda = l\mu$ である場合について考えることにしよう．

Case 1　$k = 1, l = 2$ かつ $\lambda = 2\mu, \mu \in \boldsymbol{N}$ である場合について，§7 の場合と同様にして調べることにより，次がわかる．

定理 5　$u: M \to M'$ を 1-step Carnot 空間 M から 2-step Carnot 空間 M' への固有な調和写像とし，u は半空間モデル $N \times \boldsymbol{R}_+$ を $N' \times \boldsymbol{R}_+$ へ写し，また (11) において $\lambda = 2\mu$ かつ $\mu \in \boldsymbol{N}$ は自然数であるとする．このとき，u が理想境界 $N \times \{0\}$ および $N' \times \{0\}$ まで $C^{2\mu}$ 級の写像として拡張し，$N \times \{0\}$ において

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{\beta=1}^{n'_2}(u_{1_i}^{2_\beta})^2 \neq 0 \tag{17}$$

をみたすならば，$N \times \{0\}$ 上で次がなりたつ．

(1) $$u_0^0 \neq 0.$$

(2) $$e_0^r \cdot u_0^{1_\alpha} = 0, \quad 0 \leq r \leq \mu - 1,\ 1 \leq \alpha \leq n'_1,$$
$$e_0^r \cdot u_0^{2_\beta} = 0, \quad 0 \leq r \leq 2\mu - 1,\ 1 \leq \beta \leq n'_2.$$

(3) u_0^0 は次の等式をみたす．

$$\lambda n_1 (u_0^0)^{4\mu} = 2\mu \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{\beta=1}^{n'_2}(u_{1_i}^{2_\beta})^2.$$

注意 3 でみたように，$\lambda=\mu=1$ かつ $k<l$ の場合は，(17) の仮定から一般に $u_0^0\neq 0$ を導くことはできなかったが，この場合には結論として $u_0^0\neq 0$ が導かれることに注意しよう．

Case 2　$k=2, l=1$ かつ $\mu=2\lambda, \lambda\in\boldsymbol{N}$ である場合については，対応して次がえられる．

定理 6　$u: M\to M'$ を 2-step Carnot 空間 M から 1-step Carnot 空間 M' への固有な調和写像とし，u は半空間モデル $N\times\boldsymbol{R}_+$ を $N'\times\boldsymbol{R}_+$ へ写し，また (11) において $\mu=2\lambda$ かつ $\lambda\in\boldsymbol{N}$ は自然数であるとする．このとき，u が理想境界 $N\times\{0\}$ および $N'\times\{0\}$ まで $C^{2\lambda}$ 級の写像として拡張し，$N\times\{0\}$ において

$$\sum_{i=1}^{n_2}\sum_{\beta=1}^{n_1'}\left(u_{2_i}^{1_\beta}\right)^2\neq 0$$

をみたすならば，$N\times\{0\}$ 上で次がなりたつ．

(1)
$$u_0^0\neq 0.$$

(2)
$$e_0^r\cdot u_0^{1_\beta}=0,\quad 0\leq r\leq 2\lambda-1,\ 1\leq\beta\leq n_1',$$
$$e_0^r\cdot u_{1_i}^{1_\beta}=0,\quad 0\leq r\leq\lambda,\ 1\leq\beta\leq n_1'.$$

(3)　u_0^0 は次の等式をみたす．

$$\left(\sum_{A=1}^{2}An_A\right)\left(u_0^0\right)^{4\lambda}=2\sum_{i=1}^{n_2}\sum_{\beta=1}^{n_1'}\left(u_{2_i}^{1_\beta}\right)^2.$$

参考文献

[1] P. Eberlein, *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*, The University of Chicago Press, Chicago, 1996.

[2] H. Donnelly, Dirichlet problem at infinity for harmonic maps: Rank one symmetric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 713–735.

[3] E. Heintze, On homogeneous manifolds of negative curvature, Math. Ann. **211** (1974), 23–34.

[4] P. Li and L.-F. Tam, Uniqueness and regularity of proper harmonic maps, Ann. of Math. **137** (1993), 167–201.

[5] S. Nishikawa, Harmonic maps and negatively curved homogeneous spaces, *Geometry and Topology of Submanifolds X*, World Scientific, Singapore, 200–215, 2000.

[6] 西川青季，幾何解析への誘い —調和写像と負曲率多様体の関わり—，数学 **52** (2000), 245–256.

[7] S. Nishikawa, Harmonic maps between Carnot spaces, to appear.

[8] S. Nishikawa and K. Ueno, Asymptotic behavior of proper harmonic maps between Carnot spaces, in preparation.

[9] K. Ueno, Non-existence of proper harmonic maps from complex hyperbolic spaces into real hyperbolic spaces, Tohoku Math. Publ. **20** (2001), 189–195.

[10] D. Watabe, *Dirichlet Problem at Infinity for Harmonic Maps*, Tohoku Math. Publ. **18** (2000), 71pp.